Durée : 3 heures

(L'épreuve comporte deux exercices et deux problèmes indépendants les uns des autres.)

EXERCICE 1

On considère la suite de fonctions définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f_0(x) = x$$

$$f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)) \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

1. Montrer que, $\forall\, n \geqslant 0$, la fonction f_n est positive et croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite f_n.

2.a. Montrer que, $\forall\, n \geqslant 0$, f_n est dérivable.

Montrer que la fonction f'_n est positive et décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b. Établir que, $\forall\, n \geqslant 0$, $\forall\, x > 0$, $f'_n(x) \leqslant \frac{1}{x} f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c. Étudier la convergence simple de la suite f'_n.

d. Étudier la convergence uniforme de la suite f'_n sur $\left[\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $\varepsilon > 0$.

e. La suite f'_n converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?

EXERCICE 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$, f un endomorphisme de E vérifiant :

$$f^2 - 3f + 2\,\mathrm{I} = 0, \qquad \text{où} \qquad f^2 = f \circ f$$

et I désigne l'identité de E. Ker f désigne le noyau de f et Im f l'image de f.

On suppose $f \neq \mathrm{I}$ et $f \neq 2\,\mathrm{I}$.

1. Montrer que si λ est valeur propre de f, alors $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}) \cap \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{I}) = \{0\}$, et que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{I}) \subseteq \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{I})$.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{I})$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{I})$ sont non réduits à $\{0\}$.

4. Quelles sont les valeurs propres de f ?

5. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{I}) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{I})$.

6. On suppose E de dimension 2. Comment peut-on construire tous les endomorphismes f vérifiant $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{I} = 0$? Ces endomorphismes sont-ils bijectifs ?

7. Donner des exemples d'endomorphismes f vérifiant $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{I} = 0$ en dimension 3.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME 1

1. α étant un réel strictement positif, on note :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx .$$

Montrer la convergence de l'intégrale définissant $\Gamma(\alpha)$.

2. Soit, pour $\alpha > 1$,

$$S(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}$$

Montrer que $\Gamma(\alpha)\, S(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(n+1)t}\, t^{\alpha-1} dt$.

3. Soit $I(k) = \int_0^{\infty} e^{-(k+1)t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-e^{-t}} dt$ pour k entier strictement positif.

a. Montrer que $I(k)$ est une intégrale convergente.

b. En utilisant la décomposition :

$$I(k) = \int_0^{1/\sqrt{k}} e^{-(k+1)t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-e^{-t}} dt + \int_{1/\sqrt{k}}^{\infty} e^{-(k+1)t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-e^{-t}} dt ,$$

montrer que $I(k)$ tend vers zéro quand k tend vers l'infini.

4.*a.* Montrer que, pour tout $k > 1$,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-e^{-t}} dt = \sum_{n=1}^{k} \int_0^{\infty} e^{-(n+1)t}\, t^{\alpha-1} dt + I(k) .$$

b. En déduire que :

$$\Gamma(\alpha)\, S(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-e^{-t}} dt .$$

PROBLÈME 2

1. On définit une suite de polynômes de variable réelle à coefficients réels par :

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_n(x) = x\, P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x) \qquad \forall\, n \geqslant 2 .$

a. Montrer que P_n est un polynôme de degré n.

b. (i) Montrer que $P_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, $\qquad \forall\, \theta \in]0, \pi[$.

(ii) En dérivant (i), montrer que :

$$n\, P_n(2\cos\theta) = 2\cos\theta\, P_n'(2\cos\theta) - 2\, P_{n-1}'(2\cos\theta) .$$

c. Quels sont les zéros du polynôme P_n ?

d. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbf{R},\ n\, P_n(x) = x\, P_n'(x) - 2\, P_{n-1}'(x)$$
$$(n-1)\, P_n'(x) = x\, P_n''(x) - 2\, P_{n-1}''(x)$$
$$2\, P_n''(x) = x\, P_{n-1}''(x) + (n+2)\, P_{n-1}'(x) .$$

e. Établir une équation différentielle linéaire du second ordre satisfaite par P_n.

2. Soit $\mathscr{P}$ l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $]-2, +2[$ et $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des fonctions deux fois continûment différentiables sur $]-2, +2[$.

On considère l'application : $T : \mathscr{E} \to \mathscr{P}$

$$f \to Tf ,$$
$$Tf(x) = (x^2-4)\, f''(x) + 3\, x\, f'(x)$$

a. Vérifier que T est une application linéaire.

b. Déterminer le noyau de T.

c. Montrer que les nombres $n(n+2)$ sont, pour tout $n \geqslant 2$, des valeurs propres de T. Donner un vecteur propre associé à $n(n+2)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail